

# Regressionsmodelle und Parameterschätzverfahren

Jonas Nick

Ausarbeitung im Seminar "Maschinelles Lernen"

**Zusammenfassung.** Die folgende Arbeit führt in Regressionsmodelle, wie lineare, nichtlineare und logistische Regression ein. Anschließend werden die zugehörigen Kostenfunktionen mit der Maximum Likelihood Methode und Bayes Inferenz bestimmt und Verfahren zu ihrer Optimierung vorgestellt. Zum Schluss wird die praktische Anwendung auf einen wirklichen Datensatz gezeigt.

## 1 Problembeschreibung

Charakteristisch für überwachtes maschinelles Lernen, zu der auch die Regression gehört, ist das Beschreiben der Beziehung von Zielvariable und erklärender Variable<sup>1</sup> aus vorliegenden Daten, also Realisierungen von Zufallsvariablen. Folgende Notation wird für die Daten genutzt:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R} \wedge y \in G(\text{Gruppen})$$

Hierbei bezeichnet  $x$  einen Vektor von  $n$  erklärenden Merkmalen und  $y$  ein Zielmerkmal. Bei der Regression sind also die Daten aus einem metrischen Raum, wobei das Zielmerkmal auch auf der Nominalskala sein kann, wie später bei der logistischen Regression gezeigt wird.<sup>2</sup> Wie sich gleich zeigen wird, ist es außerdem günstig  $x_0$  als 1 zu definieren.

Das Regressionsmodell stellt  $y$  durch die Summe einer Hypothese von  $x$  und einem Fehlerterm  $\epsilon$  dar.

$$y = h(x) + \epsilon$$

Das Ziel einer Regressionsanalyse besteht grundsätzlich darin, den Fehler  $\epsilon$  (auch Residuum genannt) möglichst klein zu halten. Denn meist ist man daran

---

<sup>1</sup> werden auch abhängige und unabhängige Variable oder Prädiktor genannt

<sup>2</sup> Es kann sich auch um einen Vektor von Zielvariablen handeln. Das wird hier jedoch nicht weiter behandelt.

interessiert, aus gänzlich neuen erklärenden Variablen die Zielvariable vorrauszusagen. Es soll also das  $y$  vorrausgesagt werden, dass die höchste Wahrscheinlichkeit besitzt, wenn der neue Datenpunkt  $x$  und die vorherigen Erfahrungen  $X$  und  $Y$  vorliegen.

$$\operatorname{argmax}_y p(y|x, X, Y)$$

## 2 Regressionsverfahren

### 2.1 Lineare Regression

Im linearen Regressionsmodell gibt es einen Parametervektor  $\theta$ , dessen Skalarprodukt mit Merkmalsvektor  $x$  die Hypothese darstellt.

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$h_{\theta}(x) = \theta^T x$$

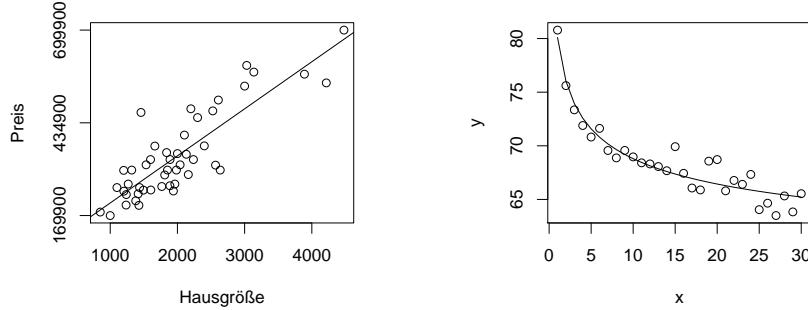
$$h_{\theta}(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n$$

Hat ein Immobilienmakler beispielsweise eine Erhebung von Häusern gemacht, bei denen er jeweils Preis und Größe des Hauses protokollierte, so lassen sich die Datenpunkte wie in Abbildung 1 darstellen. Die Hausgröße ist hier beispielsweise erklärendes Merkmal der Preis ist das Zielmerkmal. Da es nur ein erklärendes Merkmal  $x_1$  gibt, kann man die Hypothese als Geradengleichung auffassen, bei der Achsenabschnitt  $\theta_0$  und Steigung  $\theta_1$  gefunden worden sind.

### 2.2 Nichtlineare Regression

Die nichtlineare Regression ist die Linearkombination von beliebigen Funktionen  $\phi$  von  $x$ , die sogenannten Basisfunktionen. Nichtlineare Modelle sind für Daten wie in Abbildung 2, bei denen das Anlegen einer Gerade nur geringe Erfolge erzielen kann, wesentlich bessere Modelle.

$$h_{\theta}(x) = \sum_{i=0}^n \theta_i \phi_i(x)$$



**Abb. 1.** Lineare Regression, Preis abhängig von Hausgröße

**Abb. 2.** Nichtlineare Regression mit Basisfunktionen:  $\phi_1(x) = x_1$ ,  $\phi_2(x) = x_1^{-0.2}$

### 2.3 Logistische Regression

Falls es sich um ein Klassifikationsproblem handelt, das Zielmerkmal also nicht metrisch ist sondern nur abgrenzbare Kategorien annehmen kann, wendet man logistische Regression an. Im folgenden werden wir uns auf zwei Kategorien beschränken. Man nehme an, dass  $y \in \{0, 1\}$  und die Kategorien jeweils 0 und 1 entsprechen. Wenn die erklärenden Variablen  $x$  vorliegen folgt die abhängige Variable  $y$  dann einer Bernoulli Verteilung, die mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  für Kategorie 1 ('Erfolg') parametrisiert ist.

$$y \in \{0, 1\}$$

$$y|x \sim \text{Bernoulli}(p)$$

Die Hypothese ähnelt den vorangegangen, nur wird die bisherige lineare Hypothese<sup>3</sup> mithilfe einer Verbindungsfunktion  $g$  in die kontinuierliche Menge  $[0, 1]$  abgebildet, um diese als Wahrscheinlichkeit für Erfolg zu interpretieren. Da  $y$  Bernoulli verteilt ist, ist diese Wahrscheinlichkeit auch gleich dem Erwartungswert für  $y$ .

$$h_{\theta}(x) = g(\theta^T x) = p = \mathbb{E}(y|x)$$

Die angesprochene Verbindungsfunktion, ist hier die namensgebende logistische Funktion (Abbildung 3).

$$g(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

<sup>3</sup> Nichtlineare Hypothesen sind auch möglich, werden hier jedoch nicht im Speziellen behandelt

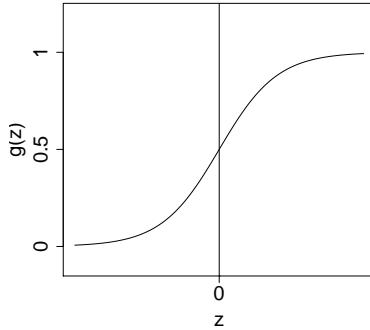
Die Hypothese hat nun genau die Eigenschaft dass ihre logarithmierten Odds<sup>4</sup> (logit)  $\pi(x)$  äquivalent zur linearen Regressionshypothese ist.

$$\pi(x) = \ln \frac{h_\theta(x)}{1 - h_\theta(x)} = \theta^T x$$

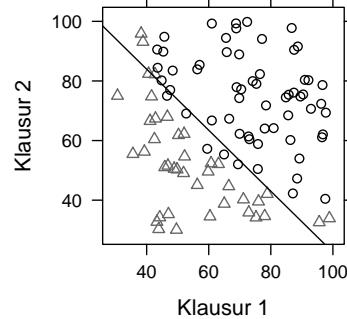
Das heißt die Interpretation von  $\theta_i$  im logistischen Model ist der geschätzte additive Effekt auf den logit für eine Veränderung des  $i$ -ten erklärenden Merkmals. Schlussendlich bildet eine Schwellenfunktion  $t(x)$  den kontinuierlichen Wert von  $h_\theta$  auf Nominalniveau ab.

$$t(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } h_\theta(x) \geq 0,5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zur Klassifikation mehrerer Variablen wird die sogenannte einer-gegen-alle Klassifikation angewandt, indem für jede Klasse  $i$  für die Wahrscheinlichkeit, dass  $y = i$  eine Hypothese  $h_\theta^{(i)}(x)$  aufgestellt wird [2, Ch. 2.2]



**Abb. 3.** Logistische Funktion



**Abb. 4.** Entscheidungsgrenze für Zulassung von Studenten, basierend auf Klausurnoten

Aus den Koeffizienten lässt sich dann eine Entscheidungsgrenze berechnen. Da  $\theta^T x > 0 \Leftrightarrow y = 1$  lässt sich als Entscheidungsgrenze eine  $n-1$  dimensionale Hyperebene berechnen. Sie teilt den Raum der erklärenden Variablen in zwei

<sup>4</sup> Odds ist eine Möglichkeit Wahrscheinlichkeiten  $p$  anzugeben und folgendermaßen definiert:  $\frac{p}{1-p}$

Halbräume, die jeweils eine Kategorie von  $y$  repräsentieren.<sup>5</sup> Die Entscheidungsgrenze für nichtlineare Regression ist analog zu berechnen.

### 3 Parameterschätzung

Als nächstes wird gezeigt, wie man die Parameter  $\theta$  findet, die die Daten am besten beschreiben, deren Fehler  $\epsilon$  also möglichst gering ist. Anstelle der Beziehung eines Vektors  $x$  von erklärenden Merkmalen zu einer Zielvariablen  $y$ , liegen bei praktischen Problemen  $m$  viele Zielvariablen  $Y$  und deren zugehörige erklärende Merkmale  $X$  vor. Dabei bezeichnet  $X$  die sogenannte Designmatrix, in der die erklärenden Merkmale für ein  $y$  zeilenweise angeordnet sind.

$$X = \begin{bmatrix} -x^{(1)^T} - \\ -x^{(2)^T} - \\ \vdots \\ -x^{(m)^T} - \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, Y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Nun werden die Parameter gesucht, die die beste Hypothese für alle Daten  $X, Y$  bildet. Dazu bedient man sich des Begriffs der Kostenfunktion, dessen Minimum die besten Parameter beschreibt.

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} J(\theta)$$

Im Folgenden widmen wir uns der Herleitung einer Kostenfunktion.

#### 3.1 Maximum Likelihood Methode

Zunächst allgemein zur Methode: bei der Maximum Likelihood Schätzung wird derjenige Parameter  $\hat{\delta}$  ausgewählt, gemäß dessen die Realisierung der beobachteten Daten am wahrscheinlichsten ist. Es bezeichne  $\mathcal{D} = (d^{(1)}, d^{(2)} \dots d^{(m)})$  Realisierungen von Zufallsvariablen mit zugehöriger Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\mathcal{D}|\delta)$ . Dann definiert man die Likelihood von  $\delta$  folgendermaßen:

$$L(\delta) := p(\mathcal{D}|\delta)$$

Wähle zu den Beobachtungen  $\mathcal{D}$  als Parameterschätzung denjenigen Parameter  $\hat{\delta}$ , für den die Likelihood maximal ist, d.h.

$$\hat{\delta} = \underset{\delta}{\operatorname{argmax}} L(\delta)$$

---

<sup>5</sup> Beispiel mit zwei erklärenden Variablen  $x_1$  und  $x_2$  (Abbildung 4):

$$\begin{aligned} \theta^T x &= 0 \\ \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 &= 0 \\ f(x_1) = x_2 &= -\frac{\theta_0}{\theta_2} - \frac{\theta_1}{\theta_2} x_1 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Daten muss also bekannt sein, bzw. vorausgesetzt werden um den Maximum Likelihood Parameter  $\hat{\delta}$  zu bestimmen. Will man beispielsweise Erwartungswert  $\mu$  sowie Standardabweichung  $\sigma$  aus normalverteilten Daten schätzen, so lässt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte folgendermaßen darstellen:

$$L(\mu, \sigma) = p(d|\mu, \sigma) = \mathcal{N}(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Sucht man nun das Maximum dieser Funktion [5, Kapitel 9.3.1] jeweils für  $\mu$  und  $\sigma$ , so landet man bei den bekannten Formeln für Mittelwert und Standardabweichung.<sup>6</sup>

Die Anwendung der Maximum Likelihood auf das Regressionsproblem erfordert folgende Annahme über die Verteilung der Zielvariable  $y$  gegeben der erklärenden Merkmale und dem Parametervektor  $\theta$ . Zielvariable  $y$  ist normalverteilt, wobei der Erwartungswert der Hypothese entspricht. Man findet nun die Hypothese, gemäß deren die Realisierung des Zielmerkmals möglichst wahrscheinlich ist. (Abbildung 5).

$$L(\theta) = p(y|x, \theta) = \mathcal{N}(h_\theta(x), \sigma_1)$$

Aus der Annahme folgt außerdem, dass die Residuen normalverteilt sind. Die Standardabweichung  $\sigma_1$  lässt sich berechnen, ist jedoch hier nicht weiter von Interesse.

Da die einzelnen Datenpunkte als unabhängig in den Daten betrachtet werden, gilt für die gesamten Daten:

$$p(Y|X, \theta) = \prod_{i=1}^m \mathcal{N}(h_\theta(x^{(i)}), \sigma_1)$$

Es ist üblich anstatt der Likelihood die log-Likelihood zu berechnen, da diese leichter abzuleiten ist, die Extremwerte aber nicht verschoben sind. Logarithmieren und Einsetzen der Gleichung für die Normalverteilung ergibt:

$$\ln L(\theta) = p(Y|X, \theta) = -\frac{\sigma_1}{2} \sum_{n=1}^m (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 + \frac{m}{2} \ln \sigma_1 - \frac{m}{2} \ln(2\pi)$$

Die letzten beiden Summanden der Gleichung hängen nicht von  $\theta$  ab, daher fallen sie weg wenn man das Maximum bezüglich  $\theta$  sucht. Multiplikation mit einem

---

<sup>6</sup>

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}$$

positiven Faktor verschiebt die Position des Maximums nicht, daher kann man die Multiplikation mit  $\sigma_1$  vernachlässigen. Des Weiteren kann man anstatt log-Likelihood zu maximieren auch die negative log-Likelihood minimieren. Dann erhält man folgende Kostenfunktion:

$$J(\theta) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

Im Grunde beschreibt diese Kostenfunktion Abweichung von realem Wert und vorhergesagtem Wert.

Gesucht ist nun das Minimum der Kostenfunktion, also der minimale Mittelwert der Fehlerquadrate. Daher bildet man die partielle Ableitung von  $J(\theta)$  für jeden Parameter  $\theta_i$  und sucht dessen Nullpunkt.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)} \stackrel{!}{=} 0$$

Durch Einsetzen der linearen Hypothese und Umformen in Matrixschreibweise erhält man ein lineares System von Normalgleichungen, mit dem sich der Parametervektor direkt berechnen lässt [2, Ch. 3.1.1].

$$\begin{aligned} \Rightarrow \theta &= X^+ y \\ &= (X^T X)^{-1} X^T y \end{aligned}$$

$X^+$  bezeichnet hier die *Moore-Penrose Pseudoinverse* von  $X$ , die das Konzept von Invertierbarkeit auf nichtquadratische Matrizen erweitert und allgemein zum Berechnen von optimalen Lösungen mit kleinsten euklidischen Normen bei linearen Ausgleichsproblemen verwendet wird. Es kann allerdings vorkommen, dass  $X^T X$  nicht invertierbar ist<sup>7</sup> - häufig aufgrund redundanter erklärender Merkmale, also solche die nicht linear unabhängig von anderen sind, oder wenn es mehr Merkmale als Datenpunkte gibt ( $m < n$ ).

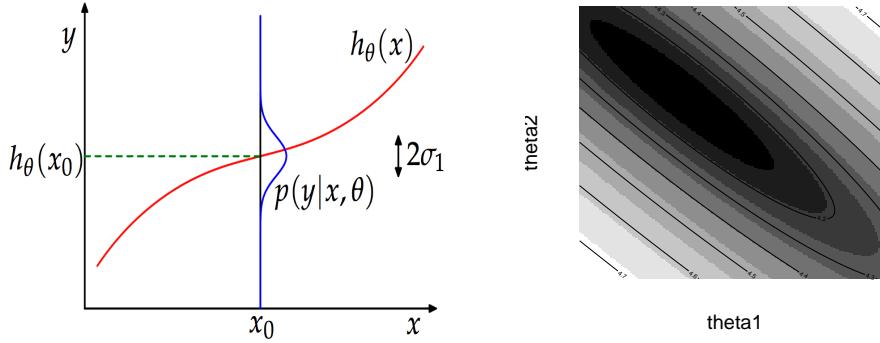
### 3.2 Gradientenverfahren

Da die Matrix  $X^T X$  eine  $n \times n$  Matrix ist und die Invertierung einer Matrix eine asymptotisch untere Schranke von  $\Omega(n^2)$  (Strassen's Algorithmus  $O(n^{2.81})$ , siehe [4, S. 827]) hat, wird die analytischen Lösungen auf Probleme mit vielen erklärenden Merkmalen nicht angewandt, sondern das meist wesentlich schnellere Verfahren des Gradientenabstiegs. Es findet das Minimum der Kostenfunktion

---

<sup>7</sup> Beweis:

Spaltenvektoren von  $X$  linear abhängig  $\Rightarrow \det(X) = 0$   
 $\Rightarrow \det(X^T) \det(X) = 0 \Rightarrow \det(X^T X) = 0$  (Produktsatz von Determinanten)  
 $\Rightarrow X^T X$  nicht invertierbar



**Abb. 5.** Annahme für die Maximum Likelihood Schätzung bei der Regression. Grafik verändert aus [2, Figure 1.16]

**Abb. 6.** Kostenfunktion der Hauspreis Regression (Abbildung 1)

dadurch, dass iterativ so lange in Richtung des Gefälles der Funktion abgestiegen wird, bis der Wertunterschied so gering ist, dass man sich sicher in der Nähe des Minimums befindet:

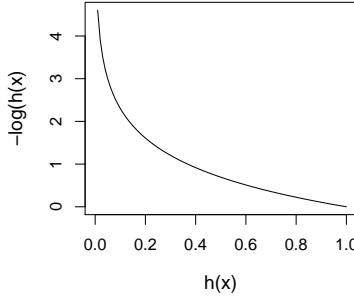
```
repeat until convergence {
  theta_j := theta_j - alpha * partial derivative of J(theta) with respect to theta_j
}
```

Die Parameter  $\theta_j$  sind anfangs zufällig initialisiert. Wichtig ist die Wahl der Lernrate  $\alpha$ , die bestimmt wie weit in der Funktion gesprungen wird. Falls nämlich  $\alpha$  zu groß gewählt wurde, so kann es sein, dass der Algorithmus systematisch das Minimum überspringt und der Algorithmus daher nicht konvergiert. Falls das Gradientenverfahren ein Minimum findet, so ist es global, da die maximum likelihood Kostenfunktion für lineare Regression konvex ist. [2, Ch. 1.6.1]

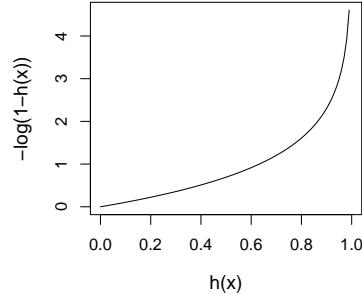
Es gibt elaboriertere Optimierungsverfahren, wie konjugierte Gradienten oder das BFGS Verfahren, die keine explizite Lernrate benötigen und unter Umständen schneller konvergieren.

### 3.3 Logistische Regression

Bei der logistischen Regression wendet man nicht die kleinste Quadrate Kostenfunktion an, da diese multiple lokale Minima haben könnte. Stattdessen ist folgende Kostenfunktion üblich:



**Abb. 7.** Logistische Kostenfunktion für  $y = 1$



**Abb. 8.** Logistische Kostenfunktion für  $y = 0$

$$J(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Cost}(h_\theta(x^{(i)}), y^{(i)})$$

$$\text{Cost}(h_\theta(x), y) = \begin{cases} -\log(h_\theta(x)) & \text{if } y = 1 \\ -\log(1 - h_\theta(x)) & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

Diese Kostenfunktion entspricht der intuitiven Vorstellung, dass Hypothesen, die in der Nähe der wahren Werte  $y = 0$  oder  $y = 1$  liegen geringe Kosten haben, im Gegensatz zu Hypothesen, die einen größeren Abstand zum wahren Wert haben (siehe Abbildung 7 und 8). Man kann keine geschlossene Form zur Minimumssuche angeben. Da diese Kostenfunktion aber konvex ist, lässt sich das Gradientenverfahren komfortabel anwenden. Folgende Formel ist äquivalent zur vorangegangenen, lässt sich allerdings leichter ableiten.

$$J(\theta) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^{(i)} \log h_\theta(x^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - h_\theta(x^{(i)}))$$

## 4 Bayes'sche Lineare Regression

Die Bayes'sche Lineare Regression ist eine Erweiterung der Linearen Regression, bei der anstelle der Maximum Likelihood die Bayes'sche Parameterschätzung eingesetzt wird. Dies führt dazu, dass die Regression weniger anfällig für Überanpassung wird.

Es wird nun zunächst allgemein das Konzept der Bayes'schen Schätzung eingeführt, um diese dann auf die lineare Regression anzuwenden.

### 4.1 Bayes Schätzer

Bei der Maximum Likelihood Methode wird der Parameter so gewählt, dass die vorliegende Beobachtung der Daten am wahrscheinlichsten ist. Tatsächlich wäre es aber umgekehrt wesentlich intuitiver, den Parameter zu wählen, der unter den vorliegenden Daten am wahrscheinlichsten ist (a posteriori Wahrscheinlichkeit). Dieses Vorgehen ist mit Bayes Inferenz möglich. Wie gehabt sei  $p(D|\delta)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte der Daten  $\mathcal{D}$ , gegeben Parameter  $\delta$ , und  $L(\delta) = p(\mathcal{D}|\delta)$  die Likelihoodfunktion.

Die Erweiterung ist, dass für das unbekannte  $\delta$  eine a priori Dichte

$$p(\delta)$$

spezifiziert wird. Nun kann die a posteriori Dichte des Parameters über den Satz von Bayes bestimmt werden durch

$$p(\delta|\mathcal{D}) = \frac{p(d|\delta)p(\delta)}{p(\mathcal{D})} = \frac{L(\delta)p(\delta)}{\int L(\delta)p(\delta)d\delta}$$

Hierbei ist der Nenner nicht von besonderem Interesse, da er nicht von  $\delta$  abhängt. Der Maximum a posteriori (MAP) Schätzer ist derjenigen Parameterwert  $\hat{\delta}_{MAP}$ , für den die a posteriori Dichte maximal wird, d.h.:

$$\hat{\delta}_{MAP} = \operatorname{argmax}_{\delta} L(\delta)p(\delta)$$

### 4.2 Bayes'sche Lineare Regression

Der für die Regression benötigte Parametervektor  $\theta$  wird nun mithilfe der Bayes Inferenz geschätzt, wozu eine a priori Verteilung angenommen wird:

$$p(\theta) = \mathcal{N}(0, \sigma_0)$$

Diese Annahme drückt unter anderem aus, Parameter nahe 0 wahrscheinlicher sind und daher näher beieinander liegen. Bei der Maximum Likelihood Methode wird dagegen impliziert, dass der Parameter einer Gleichverteilung folgt. Für die Likelihood von  $\theta$  wird die selbe Verteilungsannahme getroffen wie bei der Maximum Likelihood Schätzung für Lineare Regression.

$$L(\theta) = p(y|x, \theta) = \mathcal{N}(h_{\theta}(x), \sigma_1)$$

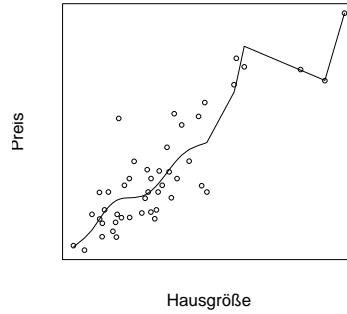
Gemäß dem Bayes Theorem ist die a posteriori Wahrscheinlichkeitsdichte proportional zum Produkt aus Likelihood und a priori Dichte.

$$p(\theta|x, y) \propto p(y|x, \theta)p(\theta)$$

Anwendung des negativen ln und Einsetzen der Normalverteilungsfunktion ergibt folgende Kostenfunktion, deren Minimum beim MAP  $\hat{\theta}$  zu finden ist.

$$J(\theta) = \frac{\sigma_1}{2} \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 + \frac{\sigma_0}{2} \sum_{j=1}^n \theta_j^2$$

Diese Kostenfunktion ähnelt sehr der Kleinsten Quadrate Kostenfunktion, außer dass durch den zweiten Summanden ganz allgemein größere Parameter  $\theta$  höhere Kosten verursachen. Dieser wird Regularisierungsterm genannt und er hilft zu vermeiden, dass das Modell überangepasst ist (Overfitting, Abbildung 9), also die Trainingsdaten zwar sehr gut approximiert, aber für neue Daten schlechte Voraussagen gemacht werden, da der Einfluss einzelner erklärender Merkmale zu groß ist. Es gibt eine handvoll von Regularisierungsverfahren, aber eine gängige



**Abb. 9.** Polynomiale Regression 10. Grades des Hauspreises ohne Regularisierung

Erweiterung wird *Tikhonov Regularisierung* genannt. Angewandt auf die kleinste Quadrate Kostenfunktion bedeutet folgendes:

$$J(\theta) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 + \lambda \sum_{j=1}^n \theta_j^2$$

Der Koeffizient  $\lambda$  beschreibt die relative Wichtigkeit des Regularisierungsterms im Vergleich zu den Fehlerquadrate und wird beispielsweise mit Kreuzvalidierung gefunden. Für diese Kostenfunktionen lässt sich das Minimum analog mit Normalgleichung oder Gradientenabstieg berechnen [2, Ch. 1.1].

Voraussage eines neuen  $y$ , basierend auf neuen erklärenden Merkmalen  $x$  und vorherigen Daten  $X$  und  $Y$  war ein anfänglich gestelltes Problem. Mit Bayes'schen Mitteln lässt sich dazu die a posteriori Dichte des Zielmerkmals ermitteln. Diese wird durch Herausmarginalisieren von  $\theta$  aus den bekannten Wahrscheinlichkeitsdichten berechnet:

$$p(y|x, X, Y) = \int p(y|x, \theta)p(\theta|X, Y)d\theta$$

Aus dieser Dichte lässt sich nun dasjenige  $y$  mit der höchsten Wahrscheinlichkeit vorraussagen.

## 5 Zusammenfassung

- Ein Regressionsmodell verknüpft Zielvariable  $y$  mit einer Funktion von erklärendem Merkmal  $x$ .
- Lineare Regression ist die Linearkombination von nach  $\theta$  gewichteten erklärenden Merkmalen.
- Kleinstes Quadrate Kostenfunktion ergibt sich aus der Maximum Likelihood Parameterschätzung.
- Logistische Regression klassifiziert mittels Verbindungsfunction.
- Bayes Regression nimmt eine a priori Verteilung der Koeffizienten  $\theta$  an, wodurch sich Überanpassung teilweise vermeiden lässt.

## 6 Anwendung: Titanic-Datensatz

Ein häufig angewandter Demonstrationsdatensatz für Klassifikationen ist eine Studie über das Sinken der Titanic [3], in dem für 1309 Passagiere jeweils angegeben ist, ob er überlebt hat, sowie zusätzliche Informationen über den Passagier, wie ökonomischer Status (Beförderungsklasse, `pclass`), Geschlecht (`sex`), Alter (`age`), Anzahl der Geschwister an Bord (`sibsp`) und Anzahl der Eltern an Bord (`parch`).

	survived	pclass	sex	age	sibsp	parch
1	0	3	male	22	1	0
2	1	1	female	38	1	0
3	1	3	female	26	0	0
4	1	1	female	35	1	0
5	0	3	male	35	0	0
6	0	3	male	NA	0	0

Die Untersuchung des Datensatzes ist historisch motiviert und kann Aufschluss über soziale Struktur der damaligen Gesellschaft und den ungefähren Ablauf der Katastrophe geben. Anhand der Abbildungen 10, 11 und 12 kann man erkennen, dass Passagiere mit hohem ökonomischer Status, Frauen und Kinder eher überlebt haben. Mit diesen drei erklärenden Variablen werden nun im Folgenden mithilfe der Open Source Statistik Software R [8] eine logistische Regression durchgeführt.

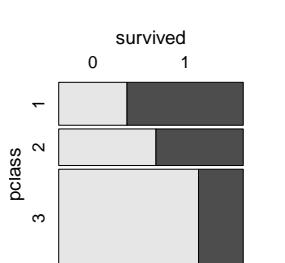
```
>model <- glm(survived ~ age + sex + I(pclass==1)
+ I(pclass==2), data=titanicTrainData,
family=binomial("logit"))
```

Der Ausdruck liest sich folgendermaßen: In der Variable `model` wird das logistische Regressionsmodell gespeichert, dass mit der Funktion `glm` erzeugt wird. Der erste Parameter spezifiziert folgende `formula`:

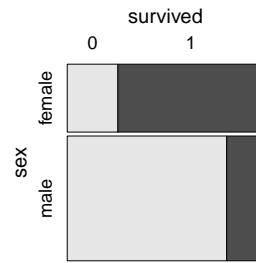
Die Zielvariable `survived` soll anhand einer linearen Kombination der erklärenden

Merkmale `age`, `sex` und `pclass` dargestellt werden. Da `sex` und `pclass` Faktorvariablen sind, also nicht kontinuierlich, wird im Modell für jede Faktorstufe eine zusätzliche erklärende Variable eingeführt die 0 oder 1 sein kann, wobei 1 bedeutet, dass die Variable die Faktorstufe annimmt. Dann können Koeffizienten für jede Faktorstufe ermittelt werden, wobei eine Faktorstufe als Standard angenommen wird. Zum Beispiel geht das Merkmal Geschlecht so in das Modell ein, dass nur im Fall ‘männlich’ der zugehörige  $\theta$ -Wert addiert wird und der Fall ‘weiblich’ als Standardfall angenommen wird.

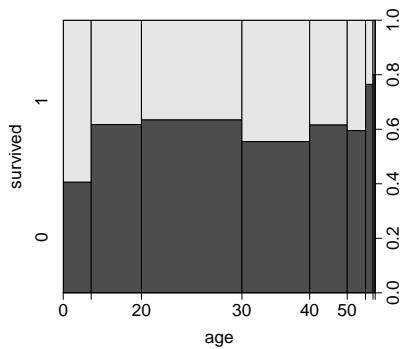
Der zweite Parameter gibt den Datensatz an und der dritte bestimmt, dass das `glm` (generalized linear model) die logit-Funktion als Verbindungsfunction nutzen soll, damit die logistische Regression durchgeführt wird



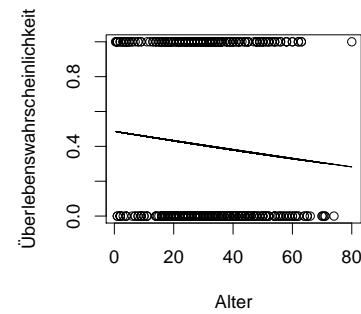
**Abb. 10.** Mosaikplot Überleben gegeben Beförderungsklasse



**Abb. 11.** Mosaikplot Überleben gegeben Geschlecht



**Abb. 12.** Mosaikplot Überleben gegeben Alter



**Abb. 13.** Einfluss des Alters auf Überlebenswahrscheinlichkeit in einem logistischen Modell mit Alter als einzigem Prädiktor.

Informationen über geschätzte Koeffizienten und Gütekriterien lassen sich mit dem Befehl `summary()` aufrufen.

```
>summary(model)
Call:
glm(formula = survived ~ age + sex + I(pclass == 1) + I(pclass ==
2), family = binomial("logit"), data = titanicTrainData)

Deviance Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q      Max
-2.7303 -0.6780 -0.3953  0.6485  2.4657

Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  1.196387  0.252649  4.735 2.19e-06 ***
age          -0.036985  0.007656 -4.831 1.36e-06 ***
sexmale      -2.522781  0.207391 -12.164 < 2e-16 ***
I(pclass == 1)TRUE  2.580625  0.281442  9.169 < 2e-16 ***
I(pclass == 2)TRUE  1.270826  0.244048  5.207 1.92e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

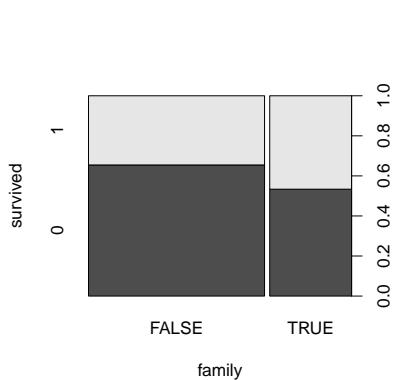
(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

Null deviance: 964.52 on 713 degrees of freedom
Residual deviance: 647.28 on 709 degrees of freedom
(177 observations deleted due to missingness)
AIC: 657.28
```

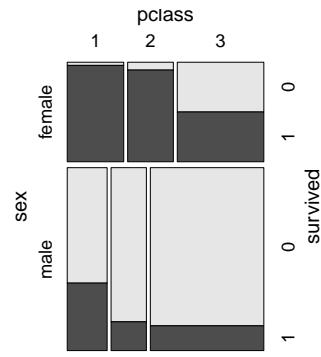
Number of Fisher Scoring iterations: 5

Hier sind zunächst die Quantile der Residuen oder Fehler  $\epsilon$  aufgetragen. Diese sollten einen Median Nähe 0 haben und bei linearer Regression annähernd normalverteilt sein. Dann sieht man zeilenweise Achsenabschnitt und die erklärenden Merkmale, wobei die erste Spalte (unter `Estimate`) genau der ermittelte  $\theta$  Vektor ist. Diese sind allerdings im Gegensatz bei der logistischen Regression nicht sehr einfach zu interpretieren. Betrachtet man zum Beispiel Geschlecht, so wird im Falle des Mannes etwa 2.5 vom linearen Modell subtrahiert, hat daher nach der logistischen Transformation eine geringere Wahrscheinlichkeit für ‘Erfolg’ und spiegelt wider, dass Männer eher seltener überlebt haben. Genauer: die Koeffizienten sind logarithmische Quotenverhältnisse (Odds ratio) und geben an, wie sich die log-Odds für ‘Erfolg’ mit jeder Veränderung der erklärenden Variable ändert. [6, S.47] Das heisst im Falle männlich ändert sich die Odds der Wahrscheinlichkeit zu überleben um den Faktor  $e^{-2.522781} \approx 0.08$ . Die folgenden Spalten geben Standardfehler, z-Werte und die Wahrscheinlichkeit mit der sich das geschätzte  $\theta$  für die Variable von 0 unterscheidet. `Null deviance` repräsentiert die Abweichung des Modells von den realen Daten ohne unabhängige Variablen (Null Modell) und `Residual deviance` hängt von der Summe der Residuale des gesamten Modells ab [1, S. 217]. AIC ist das Akaike

Information Criterion und stellt ein wichtiges Kriterium zur Auswahl des Modells dar, da sowohl Anpassungsgüte, als auch Komplexität des Modells (siehe Overfitting) in die Beurteilung mit einfließt. Es sollte möglichst klein sein, da es den Verlust von Information darstellt.



**Abb. 14.** Mosaikplot: Überleben gegeben Geschwister an Bord



**Abb. 15.** Mosaikplot: Überleben gegeben Geschlecht und Beförderungsklasse

Zusätzlich liefert das Modell auf dem Trainingsdatensatz eine Präzision von etwa 78.89% und auf dem Testdatensatz 76.07% korrekte Vorhersagen. Der Wert des Testdatensatzes lässt darauf schließen, dass die drei bisherigen Variablen einen Großteil der Daten erklären.

Zur Verbesserung des Modells werden wir den Datensatz noch etwas genauer anschauen. In Abbildung 12 erkennt man, dass die Beziehung zwischen Alter und Überleben nicht linear ist, sondern eher logarithmisch oder polynomiell. Abbildung 14 zeigt, dass Personen mit Geschwistern an Bord eher überlebt haben. Des Weiteren sieht man in Abbildung 15, dass eine Interaktion zwischen Geschlecht und Beförderungsklasse vorliegt, beispielsweise haben Frauen in der zweiten Klasse im Gegensatz zu Männern ähnlich häufig überlebt wie in der ersten Klasse. Diese Erkenntnisse sollen nun in das Modell einfließen.

```
>model <- glm(survived ~ I(log(age)) + pclass:sex + sibsp,
  data=titanicTrainData,
  family=binomial("logit"))
```

Der Interaktionsterm wird durch einen Doppelpunkt spezifiziert und bewirkt, dass für jede Kombination von Geschlecht und Beförderungsklasse ein Koeffizient geschätzt wird, der auf die log-Odds addiert wird, wenn die Kombination zutrifft. Tabelle 1 stellt die geschätzten Parameter dar. Alle unabhängigen Variablen außer pclass2:sexmale und pclass3:sexmale sind signifikant<sup>8</sup>, die

<sup>8</sup> NA bedeutet not available, warum die Koeffizienten nicht ermittelt werden können ist mir noch nicht bekannt.

Coefficient	Estimate	Probability
Intercept	1.7	0.0018
I(log(age))	-1.06	1.5e-10
sibsp	-0.54	6.68e-05
pclass1:sexfemale	5.69	<2e-16
pclass2:sexfemale	4.54	<2e-16
pclass3:sexfemale	1.53	6.25e-08
pclass1:sexmale	1.87	2.07e-10
pclass2:sexmale	-0.13	0.72
pclass3:sexmale	NA	NA

**Tabelle 1.** Estimated coefficient for the non-linear model with interactions.

Residual deviance hat sich auf 586 verkleinert, ebenso wie der AIC auf 602. Man

Variable	Deviance	AIC
<none>	586	602
I(log(age))	640	654
sibsp	605	619
pclass:sex	949	955

**Tabelle 2.** In Tabelle ist Residual deviance und AIC berechnet, wenn jeweils eine Variable fehlt.

erkennt aus Tabelle 2, dass das Modell ohne die Interaktion von Geschlecht und Beförderungsklasse am schlechtesten abschneidet, aber auch die beiden anderen erklärenden Variablen senken die Kriterien, wenn sie nicht fehlen. Des Weiteren liefert das Modell auf den Trainingsdaten 81.51% und auf dem Testdatensatz 74.6% korrekte Vorhersagen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das zweite Modell überangepasst ist, da es zwar auf dem Trainingsdatensatz bessere Ergebnisse erzielt, aber auf dem Testdatensatz schlechter als das einfache Modell abschneidet. Allerdings ist auch das Modell nicht zufriedenstellend. Denn eine sehr naive Klassifikation, bei der Frauen immer überleben und Männer nie überleben hat eine höhere Präzision, nämlich 76,5%.<sup>9</sup> Random forests erzielen eine Genauigkeit von 77.5%. Eine Erklärung für das schlechte Abschneiden der logistischen Regression in diesem Vergleich könnte darin liegen, dass auch schon das erste, einfache Modell überangepasst und deshalb das Naive Modell besser war. Auch scheint Regression generell nicht sehr gut mit faktoriellen erklärenden Variablen zurecht zu kommen, da lediglich der Achsenabschnitt verändert wird, komplexere Interaktionen aber nicht berücksichtigt werden, die beispielsweise Entscheidungsbäume im Allgemeinen besser modellieren.

<sup>9</sup> <https://www.kaggle.com/c/titanic-gettingStarted/leaderboard>

## Literatur

1. H. Baayen. *Analyzing linguistic data: A practical introduction to statistics using R*. Cambridge University Press, 2008.
2. C. M. Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2006.
3. British Board of Trade. Report on the loss of the titanic (reprint), 1990.
4. T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms* (3. ed.). MIT Press, 2009.
5. L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot, and G. Tutz. *Statistik*. Springer Verlag, siebte edition, 2011.
6. D. W. Hosmer and S. Lemeshow. *Applied logistic regression (Wiley Series in probability and statistics)*. Wiley-Interscience Publication, 2 edition, 2000.
7. A. Ng. Machine learning. Coursera, 2012.
8. R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2012. ISBN 3-900051-07-0.